UMA FORMALIZAÇÃO DA MECÂNICA CLÁSSICA DOS CORPOS RÍGIDOS

Luiz Carlos Martins

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

aprovada por

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
JANEIRO DE 1970

agradecimentos

à Matê

a meus pais e tia Elza

a Guilherme

a Bahiense

ao prof. Coimbra

saudades

a vovó, tio Flávio e meu Irmão

Luiz Carlos Martins

-RESUMO-

Consideramos uma formalização da mecânica racional de um corpo rígido sob um ponto de vista intrínseco. São utilizados apenas conceitos elementares de álgebra bilinear e rudimentos de teoria da medida. Estudaremos apenas o problema da determinação das fôrças requeridas para produzir qualquer movimento bem comportado de um dado corpo rígido e sugerimos uma interpretação para a resolução do problema recíproco. A cinemática é reduzida completamente à álgebra linear; o vetor velocidade angular é então uma simples decorrência da representação da parte linear da derivada de uma família uni-paramétrica de isometrias, contràriamente ao usual modo heurístico de introdução dêsse (pseudo) vetor.

We consider a formalization of the rational mechanics of a rigid body under a intrinsic viewpoint. Only elementary concepts of bilinear algebra and measure theory are used. We restrict ourselves to the problems of the determination of the required forces to produce and sustain any well-behaved motion of a given rigid body and then suggest a interpretation for the resolution of the reciprocal problem. Kinematics is completely reduced to linear algebra. The existence of the angular velocity vector then follows from the representation of the linear part of the derivative of a one-parameter family of isometries, in opposition to the usual heuristic form in which such vector is commonly introduced.

-ÍNDICE-

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O que se ganha com a axiomatização? A axiomatização de uma teoria não é nada mais que organização e completação do que era um corpo de conhecimentos mais ou menos desordenado e incompleto: ela exibe a estrutura da teoria e torna seu significado mais preciso (BUNGE[5]).

É verdade que a mecânica clássica dos sistemas de número finito de "partículas" já está proposta em base rigorosa (vide referências em BUNGE[5]). A maioria dos livros em mecânica clássica dos corpos rígidos parte da "mecânica das partículas" e trata um corpo rígido "contínuo" como um caso limite de apropriados sistemas de partículas com um número crescente delas. Tal procedimento é reconhecidamente incorreto.

A mecânica dos corpos rígidos pode entretanto ser obtida a partir da mecânica do contínuo (TRUESDELL & NOLL[12]), porém a estrutura requerida para que tal se dê impõe demasiadas restrições ao corpo, e.g., a existência de uma estrutura diferenciável, e introduz o tensor das tensões para então descobrir a sua indeterminação sob a hipótese de rigidez. Uma axiomatização independente é então desejável.

É nosso propósito desenvolver uma mecânica clássica dos corpos rígidos, dotada de uma cinemática intrínsica, de onde provém, apelando aos poderosos resultados de convergência da teoria da medida, a dinâmica. Estaremos então nos limitando a obter as "fôrças" a partir de um dado movimento. Uma segunda alternativa, a de "postular" fôrça é desenvolvida por NOLL[6]. Movimentos impulsivos não são tratados pois o aparato matemático requerido não justifica a escassez de resultados importantes.

Precisamos ir adiante de nós mesmos. Se definimos fôrça por $m\ddot{y}_t$ e definimos momento das fôrças por $\int_{\mathcal{B}} \ddot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - y_o)\, d\mu$, fornecemos no teorema 26 a preciosa informação de como se transporta o momento das fôrças. Além disso não fica longe a "previsão" do movimento de um corpo rígido dado que podemos "interpretar" vinculações, fôrças aplicadas e campos como restrições a $\dot{H}_{y_{o},t}$ e $\ddot{y}_t$.

Uma última observação. Por uma questão estética mantivemos a denominação de teorema mesmo quando a trivialidade da questão impunha ao bom senso a denominação de proposição.

A prova dos teoremas se encerra pelo símbolo ▮

CAPÍTULO II

O MOVIMENTO

§ 1 - a caracterização de movimentos rígidos

Definição 1 (preliminar)

Chamamos de corpo a todo conjunto não vazio $\mathcal{B}$. Aos elementos $p \in \mathcal{B}$ chamaremos de partícula.

Definição 2

Seja E um espaço pontual euclidiano e $V = E^{\#}$ o espaço das translações de E. Suporemos que V é um espaço vetorial real tridimensional, dotado de produto interno $\langle \, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. A topologia em E é a induzida pelo produto interno em V.

Os elementos $x, y, \ldots$ de E serão denominados pontos.

Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos reais, com sua topologia habitual. Aos elementos $t \in \mathbb{R}$ chamaremos de instantes.

Entende-se por movimento de um corpo $\mathcal{B}$ a tôda aplicação $\chi : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \to E$, que satisfaz às seguintes condições:

a) Para todo instante $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\chi_t : \mathcal{B} \to E$, definida por $\chi_t(p) = \chi(p,t)$ é injetiva.

b) Para tôda partícula $p \in \mathcal{B}$ e $x_0 \in E$, a aplicação $\Psi_p : \mathbb{R} \to V$, definida por $\Psi_p(t) = \chi(p,t) - x_0$, possui segunda derivada em todos os instantes.

Definição 3

Dados um movimento χ de um corpo $\mathcal{B}$, um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e um instante $\tau \in I$, diremos que o movimento χ é rígido em I quando a aplicação $\chi_t \cdot \chi_\tau^{-1} : \chi_\tau(\mathcal{B}) \longrightarrow E$ for uma isometria para todo $t \in I$.

Note-se que a aplicação $\chi_t \circ \chi_\tau^{-1}$ é sôbre $\chi_t(\mathcal{B})$. Evidentemente se χ é um movimento rígido em I para um dado $\tau \in I$, então χ é um movimento rígido em I qualquer que seja $\tau' \in I$.

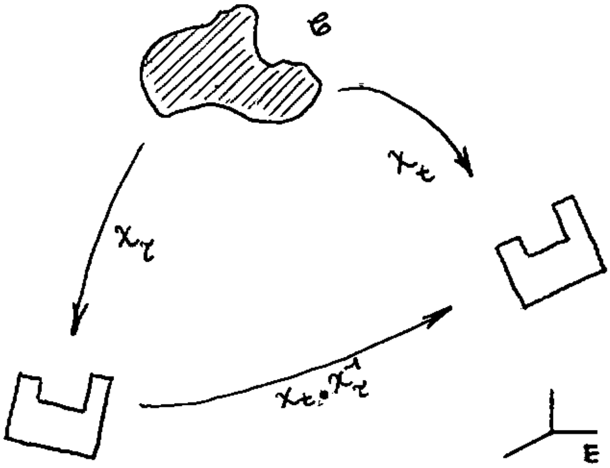


fig 1

§ 2 – movimentos rígidos versus transformações ortogonais

Lema 1

Seja T uma aplicação de V em V que preserva produto interno, isto é, para todo par $(u,v) \in V \times V$

$$\langle T\,u,\ Tv\rangle = \langle u,v\rangle$$

Então T é ortogonal.

Prova:

1º) T preserva norma

Por hipótese, $\langle Tu, Tu\rangle = \langle u,u\rangle$

logo,

$$\langle Tu, Tu\rangle^{1/2} = \langle u,u\rangle^{1/2} \equiv \|u\| = \|Tu\|$$

2º) T é linear

Pois, qualquer que seja $\lambda \in R$ tem-se:

$$\|\lambda Tu - T\lambda u\|^2 = \lambda^2 \|Tu\|^2 - 2\lambda\langle Tu,\ T\lambda u\rangle + \|T\lambda u\|^2 =$$

$$= \lambda^2\|u\|^2 - 2\lambda\langle Tu, T\lambda u\rangle + \|\lambda u\|^2 =$$

$$= \lambda^2\|u\|^2 - 2\lambda\langle u, \lambda u\rangle + \lambda^2\|u\|^2 = 0$$

Logo, T é homogênea. Por outro lado, quaisquer que sejam u, v

$$\|T\,(u+v) - (Tu+Tv)\|^2 = \|T(u+v)\|^2 - 2\langle T(u+v)\,, Tu\rangle - 2\langle T(u+v)\,, Tv\rangle + \|Tu + Tv\|^2 =$$

$$=\|u+v\|^2 - 2\langle u+v,u\rangle - 2\langle u+v,v\rangle + \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle =$$

$$= \|u+v\|^2 - 2\|u+v\|^2 + \|u+v\|^2 = 0$$

o que demonstra a aditividade

∎

Definição 4

Seja χ um movimento rígido de um corpo $\mathcal{B}$, num intervalo I. Diremos que o corpo $\mathcal{B}$ se configura tridimensionalmente num dado instante $\tau \in I$, se o conjunto

$$\{v \in V \mid p,q \in \mathcal{B} \text{ e } v = \chi_\tau(p) - \chi_\tau(q)\}$$

é um sistema de geradores de V.

No que se segue estudaremos apenas movimentos rígidos em I de corpos que se configuram tridimensionalmente em dado $\tau \in I$. Para um corpo $\mathcal{B}$ notaremos a classe de tais movimentos por $\mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$; consideraremos apenas casos não triviais, i.e., corpos $\mathcal{B}$ tais que $\mathcal{O}(\mathcal{B}, I) \neq \phi$

Seja $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$ um movimento de $\mathcal{B}$, e $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ tal que

$$y_1 - y_0 = w_1$$
$$y_2 - y_0 = w_2$$
$$y_3 - y_0 = w_3$$

constituem uma base de V. Notemos $\chi_t \circ \chi_\tau^{-1}$ por μ_t e seja T: $V \to V$ definida por

$$T(x - y_0) \equiv \mu_t(x) - \mu_t(y_0) \qquad \text{se } x \in \chi_\tau(\mathcal{B}) \qquad \text{e}$$

$$T(x - y_0) \equiv \xi_1 T(w_1) + \xi_2 T(w_2) + \xi_3 T(w_3) \qquad \text{se } x \notin \chi_\tau(\mathcal{B}) \quad \text{e } x - y_0 =$$
$$= \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3$$

Lema 2

A aplicação T, acima definida, preserva produto interno.

Prova:

Se $x_1, x_2 \in \chi_\tau(\mathcal{B})$, então como μ_t é uma isometria

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|\mu_t(x_1) - \mu_t(x_2)\|^2$$

Tem-se também

$$\|x_1-x_2\|^2=\|(x_1-y_0)-(x_2-y_0)\|^2=\|x_1-y_0\|^2+\|x_2-y_0\|^2-2\langle x_1-y_0,x_2-y_0\rangle$$

$$\|\mu_t(x_1)-\mu_t(x_2)\|^2=\|\mu_t(x_1)-\mu_t(y_0)\|^2+\|\mu_t(x_2)-\mu_t(y_0)\|^2-2\langle\mu_t(x_1)-\mu_t(y_0),\mu_t(x_2)-\mu_t(y_0)\rangle$$

Logo, $\langle x_1-y_0,x_2-y_0\rangle=\langle\mu_t(x_1)-\mu_t(y_0),\mu_t(x_2)-\mu_t(y_0)\rangle$

Se z_1, z_2 $\notin \chi_\tau(\mathcal{B})$, então sejam

$$z_1-y_0=\xi_1 w_1+\xi_2 w_2+\xi_3 w_3$$
$$z_2-y_0=\gamma_1 w_1+\gamma_2 w_2+\gamma_3 w_3$$

Logo,

$$\langle z_1-y_0,z_2-y_0\rangle=\sum_{i,j=1,2,3}\xi_i\gamma_j\langle w_i,w_j\rangle=\sum_{i,j=1,2,3}\xi_i\gamma_j\langle Tw_i,Tw_j\rangle=\langle T(z_1-y_0),T(z_2-y_0)\rangle$$

Se $z\notin\chi_\tau(\mathcal{B})$ e $x\in\chi_\tau(\mathcal{B})$, então

$$\langle z-y_0,x-y_0\rangle=\langle\xi_1w_1+\xi_2w_2+\xi_3w_3,x-y_0\rangle=\langle\xi_1Tw_1+\xi_2Tw_2+\xi_3Tw_3,\mu_t(x)-\mu_t(y_0)\rangle$$

∎

Teorema 1 (Euler)

Seja $\chi\in\mathcal{O}(\mathcal{B},I)$ um movimento do corpo $\mathcal{B}$. Então a aplicação $\mu_t:\ \chi_\tau(\mathcal{B})\longrightarrow\chi_t(\mathcal{B})$ admite a seguinte representação:

$$\mu_t(x)=\mu_t(y_0)+Q_t(x-y_0),$$

onde Q_t é uma transformação ortogonal em V e usamos a notação imediatamente anterior.

Prova:

Como $\mu_t(x)=\mu_t(y_0)+\left(\mu_t(x)-\mu_t(y_0)\right)$, basta tomar $Q_t=T$ do Lema 2. ∎

Observamos assim, que se χ é um movimento, rígido em I, de um corpo $\mathcal{B}$, e se $\mathcal{B}$ se configura tridimensionalmente em $\tau\in I$, então o corpo $\mathcal{B}$ se configura tridimensionalmente para qualquer $\tau'\in I$.

Teorema 2

Se $\chi\in\mathcal{O}(\mathcal{B},I)$, a aplicação Q_t: $V\rightarrow V$ independe da particular escolha do conjunto $\{y_0,y_1,y_2,y_3\}\subset\chi_\tau(\mathcal{B})$.

Prova:

Temos $\mathcal{U}_t(x) = \mathcal{U}_t(y_0) + Q_t(x - y_0)$

E para $\{z_0, z_1, z_2, z_3\} \subset \mathcal{X}_\gamma(\mathcal{C})$, desde que $\{z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0\}$ gera V, teremos:

$$\mathcal{U}_t(x) = \mathcal{U}_t(z_0) + Q_t^{z_0}(x - z_0)$$

Também podemos escrever pela primeira igualdade:

$$\mathcal{U}_t(z_0) = \mathcal{U}_t(y_0) + Q_t(z_0 - y_0)$$

Assim, vem:

$$\mathcal{U}_t(x) = \mathcal{U}_t(y_0) + Q_t(z_0 - y_0) + Q_t^{z_0}(x - z_0)$$

Comparando a primeira igualdade com a última, tem-se

$$\mathcal{U}_t(y_0) + Q_t(z_0 - y_0) + Q_t^{z_0}(x - z_0) = \mathcal{U}_t(y_0) + Q_t(x - y_0)$$

Então,

$$Q_t(z_0 - y_0) + Q_t^{z_0}(x - z_0) = Q_t(x - y_0)$$

$$Q_t^{z_0}(x - z_0) = Q_t(x - z_0)$$

Logo,

$$Q_t^{z_0} = Q_t$$

$\blacksquare$

CAPÍTULO III

CINEMÁTICA .

§ 1 – o movimento absoluto

Definição 5

Seja $\chi \in \Theta(\mathcal{B}, I)$ um movimento do corpo $\mathcal{B}$. Dado $x_o \in E$, definimos velocidade e aceleração da partícula p, no instante $\tau \in I$, como sendo , respectivamente, os vetores:

$$v_p(\tau) = \frac{d}{dt}\left(\chi(p,t) - x_o\right)\Big|_\tau \equiv \dot{\Psi}_p(\tau) = \dot{\chi}_p(\tau)$$

$$a_p(\tau) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\chi(p,t) - x_o\right)\Big|_\tau \equiv \ddot{\Psi}_p(\tau) = \ddot{\chi}_p(\tau)$$

De acôrdo com o teorema de Euler, temos

$$\mathcal{U}_t(x) = \mathcal{U}_t(y_o) + Q_t\,(x - y_o).$$

Porém, dado que

$$\mathcal{U}_t(x) - x_o = \chi(p,t) - x_o \equiv \Psi_p(t)$$

$$\mathcal{U}_t(y_o) - x_o = \chi(q,t) - x_o \equiv \Psi_q(t)$$

Concluimos que,

$$\Psi_p(t) - \Psi_q(t) = Q_t\,(x - y_o) = Q_t\left(\chi_\tau(p) - \chi_\tau(q)\right) = \chi(p,t) - \chi(q,t)$$

Como, por hipótese, as derivadas segundas de $\Psi_p(t)$ e $\Psi_q(t)$ existem e dada a arbitrariedade das partículas p e q, podemos enunciar o

Teorema 3

Num movimento $\chi \in \Theta(\mathcal{B}, I)$ de um corpo $\mathcal{B}$, a aplicação $g: I \to \mathcal{L}(V,V)$: $t \mapsto Q_t$ possui segunda derivada em todos os instantes.

Notaremos $\frac{d}{dt}g\Big|_\tau$ por $\dot{Q}_\tau$ e, anàlogamente, $\frac{d^2}{dt^2}g\Big|_\tau \equiv \ddot{Q}_\tau$ ∎

Teorema 4

A transformação Q_t é própria

Prova:

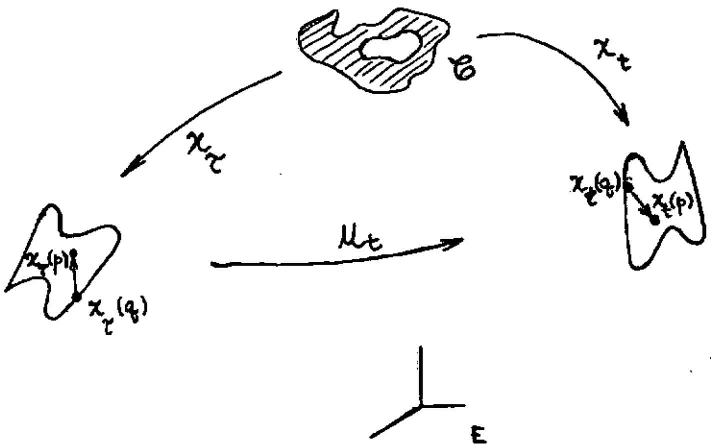
Temos que $\chi_p(t) = \chi_q(t) + Q_t\left(\chi_p(\tau) - \chi_q(\tau)\right)$

Como Q_t é ortogonal, então $\det Q_t = \pm 1$

Entretanto, quando $t = \tau$, Q_τ é a aplicação identidade (id) e assim $\det Q_\tau = \det id = 1$

Donde, pela continuidade de Q_t,

$$\det Q_t = + 1, \text{ para todo } t \in I$$



(fig.2)

O seguinte lema é imediato.

Lema 3

Se $\chi \in \Theta(\mathcal{B}, I)$, então

$$\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + \dot{Q}_t\left(\chi_\tau(p) - \chi_\tau(q)\right)$$

$$\ddot{\Psi}_p(t) = \ddot{\Psi}_q(t) + \ddot{Q}_t\left(\chi_\tau(p) - \chi_\tau(q)\right)$$

Prova:

Seguem da equação $\Psi_p(t) = \Psi_q(t) + Q_t\left(\chi_\tau(p) - \chi_\tau(q)\right)$ e do teorema 3.

Os seguintes resultados, de demonstração trivial, merecem a denominação de teorema.

Teorema 5 da representação da velocidade (I)

Se $\chi \in \Theta(\mathcal{B}, I)$, então,

$\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + \dot{Q}_t Q_t^T\left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right)$, onde Q_t^T denota a inversa de Q_t.

Prova:

Do lema 3 e da expressão do teorema de Euler, temos:

$$\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + \dot{Q}_t\left(\Psi_p(\tau) - \Psi_q(\tau)\right) \qquad \text{e}$$

$$\Psi_p(t) - \Psi_q(t) = Q_t\left(\Psi_p(\tau) - \Psi_q(\tau)\right)$$

Aplicando Q_t^T a última equação vem:

$$Q_t^T\left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right) = \Psi_p(\tau) - \Psi_q(\tau)$$

E assim

$$\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + \dot{Q}_t Q_t^T\left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right)$$

∎

Lema 4

A transformação $\dot{Q}_t Q_t^T$ é antissimétrica

Prova

$Q_t Q_t^T = id$

Derivando, vem

$\dot{Q}_t Q_t^T + Q_t \dot{Q}_t^T = 0$

Porém, notando a transposta por *, temos

$\left(\dot{Q}_t Q_t^T\right)^* = \left(Q_t^T\right)^* \left(\dot{Q}_t\right)^* = Q_t \dot{Q}_t^T$

Assim, reescrevendo a igualdade anterior:

$$\dot{Q}_t Q_t^T + \left(\dot{Q}_t Q_t^T\right)^* = 0$$

∎

§ 2 - o produto vetorial em V

Seja Δ uma função (não trivial) em V^3: $\Delta : V\times V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

1º) Δ é linear para todo argumento.

2º) Δ é antissimétrica para todo argumento, isto é, se σ é uma permutação de (1, 2, 3), então.

$$\Delta\left(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, u_{\sigma(3)}\right) = \varepsilon_\sigma \; \Delta\left(u_1, u_2, u_3\right) \qquad , \text{ onde}$$

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{ se } \sigma \text{ é uma permutação } \begin{cases} \text{par} \\ \text{ímpar} \end{cases}$$

3º) $\Delta(u_1, u_2, u_3) \neq 0$ para alguma tripla ordenada (u_1, u_2, u_3)

Uma função Δ satisfazendo estas condições é chamada <u>função determinante</u> (não trivial) em V.

Se Δ e Δ_1 $(\neq 0)$ são duas funções determinantes em V, então

$$\Delta = \lambda \Delta_1 \quad , \text{ onde } \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota: A demonstração dêste e de outros resultados que serão utilizados nêste parágrafo, encontram-se, por exemplo, em GREUB[1].

Introduzamos a relação $\sim$ na classe $\mathcal{A}$ de tôdas as funções determinantes não triviais em V, definida por

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \quad \text{se} \quad \Delta_1 = \lambda \Delta_2 \quad \text{e} \quad \lambda > 0$$

É imediato que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência e $\mathcal{A}/\sim$ consta de duas classes de equivalência. Cada uma destas classes será chamada uma <u>orientação</u> de V.

Se $\Delta_0 \neq 0$ é uma função determinante em V, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta_0(u_1, u_2, u_3)\, \Delta_0(v_1, v_2, v_3) = \lambda \det \| \langle u_i, v_j \rangle \|$$

Na expressão acima, fazendo $u_i = v_i = e_i$, onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal em V, vem

$$\left(\Delta_0(e_1, e_2, e_3)\right)^2 = \lambda$$

de modo que $\lambda > 0$

Nestas condições, podemos definir duas funções determinantes,

$$\Delta_+ = +\frac{\Delta_0}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\Delta_- = -\frac{\Delta_0}{\sqrt{\lambda}}$$

que podemos tomar como representantes das classes de equivalência de $\mathcal{A}/\sim$ e $\Delta_\pm$ são ditas <u>normadas</u> e

$$\Delta_\pm(u_1, u_2, u_3)\, \Delta_\pm(v_1, v_2, v_3) = \det \| \langle u_i, v_j \rangle \|$$

Definição 6 o produto $u \times v$.

Suponhamos definida em V uma função determinante normada Δ. Dados $u, v \in V$, definamos uma forma linear em V por

$$f(w) = \Delta(u, v, w)$$

Pelo teorema da representação de Riesz, (GREUB[1], cap VII), temos que:

$$f(w) = \langle r, w \rangle \quad , \text{ onde } r \in V.$$

O vetor $\underline{r}$ é chamado produto vetorial de u e v e será notado por $u \times v$. Desta forma tem-se

$$\langle u \times v, w \rangle = \Delta(u, v, w)$$

Da antissimetria de Δ, decorre que $u \times v = - v \times u$. Além disso,

$$\langle u \times v, u \rangle = \Delta(u, v, u) = 0 \qquad \text{e}$$
$$\langle u \times v, v \rangle = \Delta(u, v, v) = 0$$

de modo que $u \times v$ é ortogonal a ambos os fatôres.

Seja φ uma transformação linear, antissimétrica, em V. Como $\varphi = -\varphi^*$ tem-se

$$\langle \varphi u, v \rangle + \langle u, \varphi v \rangle = 0$$

Logo,

$$\langle \varphi u, u \rangle = 0$$

de modo que u e φu são ortogonais.

Mostremos que o pôsto de φ é sempre par.

Teorema 6

Se φ é uma transformação antissimétrica em V ($\dim V = 3$), então $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$ ou $\dim \operatorname{Im} \varphi = 0$.

Prova:

Temos que $\varphi(\operatorname{Im} \varphi) \subset \operatorname{Im} \varphi$. Seja φ_1 a restrição de φ à $\operatorname{Im} \varphi$ e consideremos $u \in \operatorname{Im} \varphi$ e $v \in V$ tal que $\varphi v = u$. Então, se $\varphi_1 u = 0$, teremos:

$$\langle \varphi_1 u, w \rangle = 0$$

Mas $\varphi_1 u = \varphi u$. Logo,

$$\langle \varphi u, w\rangle = 0 \text{ , para todo } w \in V.$$

Por outro lado,

$$\langle \varphi\varphi v, w\rangle = 0$$
$$\langle \varphi v, \varphi w\rangle = 0$$

Como $\langle \ , \ \rangle$ restrito à $\mathrm{Im}\varphi$ ainda é um produto interno, vem que $\varphi v = 0$. Logo $u = \varphi v = 0$.

Desta forma, φ_1 é bijeção de $\mathrm{Im}\varphi$ em $\mathrm{Im}\varphi$ e φ_1 é evidentemente antissimétrica.

Além disso, qualquer que seja φ antissimétrica definida num espaço vetorial W (dim W = n) tem-se:

$$\det \varphi = \det \varphi^* = \det(-\varphi) = (-1)^n \det\varphi$$

Dado que φ_1 é bijetiva, então $\det \varphi_1 \neq 0$ e $\underline{n}$ é par. Como dim V = 3, então o teorema está demonstrado. ∎

Teorema 7

Sejam φ_1 e φ_2 duas transformações antissimétricas não triviais em V. Se os anuladores de φ_1 e φ_2 coincidem e se dado $u \notin \ker \varphi_1$, $\varphi_1 u = \varphi_2 u$, então $\varphi_1 = \varphi_2$.

Prova:

Pelo teorema 6, dim kern $\varphi_1 = 1$. Sejam $v \notin \ker \varphi_1$, $v \neq u$ e $w \neq 0$ tal que $w \in \ker \varphi_1$. Então, para $i = 1, 2$

$$\langle \varphi_i v, w\rangle = -\langle v, \varphi_i w\rangle = 0$$
$$\langle \varphi_i v, v\rangle = 0$$

Logo, $\varphi_i v$ é ortogonal a v e w e assim existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\varphi_1 v = \lambda \varphi_2 v$$

Por outro lado,

$$\langle u, \varphi_i v\rangle = -\langle \varphi_i u, v\rangle$$

Como $\varphi_1 u = \varphi_2 u$, decorre que

$$\langle u, \varphi_1 v\rangle = \langle u, \varphi_2 v\rangle \qquad \text{e}$$
$$\langle u, \varphi_1 v - \varphi_2 v\rangle = 0$$

Porém, $\varphi_1 v = \lambda \varphi_2 v$ e assim

$$\langle u, \varphi_2(\lambda v - v)\rangle = 0$$

Como $u \neq 0$, concluímos que

$$\varphi_2(\lambda v - v) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi_2(\lambda v - v) \neq 0 \text{ é ortogonal a } u.$$

1º caso:

$$\varphi_2(\lambda v - v) = 0$$

Como $v \notin \ker \varphi_2$, tem-se $\lambda v - v = 0$. Então $\lambda = 1$.

2º caso:

$$\varphi_2(\lambda v - v) \neq 0 \text{ é ortogonal a } \underline{u}.$$

Nêste caso, como $\varphi_2 u$ é ortogonal a u, teremos

$$\varphi_2 u = \alpha\, \varphi_2(\lambda v - v)$$

$$\varphi_2\big(u - \alpha(\lambda v - v)\big) = 0$$

Então:

$$u - \alpha(\lambda v - v) = \beta w$$

Ou ainda

$$\alpha(\lambda v - v) = u - \beta w$$

Porém, por hipótese, $\varphi_1(u - \beta w) = \varphi_2(u - \beta w)$ e assim

$$\varphi_1 v = \varphi_2 v$$

∎

<u>Teorema</u> 8

Se em V está definida uma função determinante normada e se φ é uma transformação antissimétrica em V, então $\varphi v = w \times v$, onde w é ùnicamente determinada por φ.

Prova:

Dado $w \in V$, a aplicação $\Omega : V \to V : v \mapsto w \times v$ é antissimétrica, pois

$$\langle \Omega v, u\rangle = \langle w \times v, u\rangle = \Delta(w, v, u) = -\Delta(w, u, v) =$$

$$= -\langle w \times u, v\rangle = -\langle \Omega u, v\rangle = \langle v, -\Omega u\rangle$$

Se φ é trivial, então imediatamente, $w = 0$.

Sejam $w_1 \neq 0$, pertencente a kern φ, e $u \notin$ kern φ. Então

$$\langle \varphi u, w_1 \rangle = 0 \text{ e } \langle \varphi u, u \rangle = 0$$

Também $\langle w_1 \times u, w_1 \rangle = \langle w_1 \times u, u \rangle = 0$

Desta forma,

$$\varphi u = \lambda w_1 \times u$$

Então, basta tomar $w = \lambda w_1$

∎

§ 3 - o vetor velocidade angular

Retomemos o teorema 5 e enunciemos

Teorema 9 da representação da velocidade (II)

Seja V um espaço orientado por Δ, uma função determinante normada. Então:

$$\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + w_t \times \left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right).$$

Prova:

Dado que $\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + \dot{Q}_t Q_t^T \left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right)$ e $\dot{Q}_t Q_t^T$ é antissimétrica, pelo teorema 8 podemos escrever

$$\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + w_t \times \left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right)$$ ∎

O vetor w_t será denominado vetor velocidade angular do corpo.

Também, como $\dot{Q}_t Q_t^T$ possui derivada e $\dot{Q}_t Q_t^T(u) = w_t \times u$, decorre que w_t é derivável em I e $(\dot{\overline{Q_t Q_t^T}})(u) = \dot{w}_t \times u$

Teorema 10 da representação da aceleração (I)

Se $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$, então

$$\ddot{\Psi}_p(t) = \ddot{\Psi}_q(t) + (\dot{\overline{Q_t Q_t^T}})\left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right) + \dot{Q}_t Q_t^T\left[\dot{Q}_t Q_t^T\left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right)\right]$$

Prova:

Derivando a expressão $\dot{\Psi}_p(t) = \dot{\Psi}_q(t) + \dot{Q}_t Q_t^T \left(\Psi_p(t) - \Psi_q(t)\right)$ o resultado é imediato.

∎

Teorema 11 da representação da aceleração (II)

Se $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$, então

$$\ddot{\Psi}_p(t) = \ddot{\Psi}_q(t) + \dot{w}_t \times (\Psi_p(t) - \Psi_q(t)) + w_t \times \left[w_t \times (\Psi_p(t) - \Psi_q(t)) \right]$$

Prova: Imediata.

∎

§ 4 – novamente o movimento rígido

Nêste ponto, vamos rever criticamente a definição de movimenro rígido. Dada uma aplicação χ de $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$ em E, então $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ quando as seguintes condições são verificadas.

MR_1) χ_p possui segunda derivada, qualquer que seja $p \in \mathcal{B}$.

MR_2) χ_t é injetiva, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$.

MR_3) $\chi_t \circ \chi_\tau^{-1}(x)$ é uma isometria

MR_4) O subespaço gerado pelos vetores $\chi_\tau(p) - \chi_\tau(q)$, onde p, q $\in \mathcal{B}$, é V.

Em geral $\mathcal{B}$ é identificado a uma parte de E, de modo que χ: $\mathcal{B} \times \mathbb{R} \to E$ se confunde com $\chi_t \cdot \chi_\tau^{-1}$, parametrizada por t, e as condições MR_1—MR_4 nêste caso se reduzem a:

MRE_1) $\mathcal{B}$ se configura tridimensionalmente

MRE_2) Existe para a aplicação $\chi(x_1, x_2, x_3, t)$, de $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$ em E, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$ qualquer que seja (x_1, x_2, x_3, t)

MRE_3) χ_t é uma isometria.

Vamos estabelecer um critério para responder à seguinte pergunta: Se $\mathcal{B} \subset E$ é uma parte "tridimensional" de E e se χ_t: $\mathcal{B} \to E$ é uma família de transformações em E, sob que condições $\{\chi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ representa um movimento rígido de $\mathcal{B}$?

Lema 5

Seja T um operador bilinear, simétrico, em V, com a seguinte propriedade:

$$\langle T(u,v), w\rangle + \langle v, T(u,w)\rangle = 0$$

quaisquer que sejam u, v, w $\in$ V. Então, T é identicamente nulo.

Prova:

Temos que $\langle T(u,v), w\rangle = -\langle v, T(u,w)\rangle$

Então,

$$\langle T(u,v),w\rangle = \langle T(v,u),w\rangle = -\langle T(v,w),u\rangle = -\langle T(w,v),u\rangle =$$
$$= \langle T(w,u),v\rangle = \langle T(u,w),v\rangle = -\langle T(u,v),w\rangle$$

Logo,

$2\langle T(u,v), w\rangle = 0$, e o lema está demonstrado. ∎

Por razões técnicas, vamos nos restringir ao caso em que o corpo $\mathcal{C}$ está contido em um aberto conexo $U \subset E$, e a aplicação χ_t, para cada $t \in \mathbb{R}$, é a restrição à $\mathcal{C}$ de uma aplicação F_t: $U \to E$.

Lema 6

Sejam U um aberto conexo de E e $F: U \to E$ uma aplicação de classe C^2. Se para todo $x \in U$ a derivada $F'(x)$ é ortogonal, então F é uma isometria.

Prova:

Por hipótese, podemos escrever

$\langle F'(x)v, F'(x)w\rangle = \langle v, w\rangle$, onde $v. w \in V$.

Derivando, vem

$$\langle F''(x)(u,v), F'(x)w\rangle + \langle F'(x)v, F''(x)(u,w)\rangle = 0$$

ou,

$$\langle F'(x)^T F''(x)(u,v), w\rangle + \langle v, F'(x)^T F''(x)(u,w)\rangle = 0$$

Mas,como $F \in C^2(U)$, $F''(x)$ é simétrico. E pelo lema 5.

$$F'(x)^T F''(x)(u,v) = 0$$

Aplicando $F'(x)$, vem que $F''(x) = 0$, e assim concluimos que $F'(x)$, ortogonal por hipótese, é constante. Logo F é uma isometria

∎

Teorema 12

Seja $\{F_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família de aplicações de $U \subset E$ em E. Suponhamos que U seja aberto conexo "tridimensional" e que F_t seja de classe C^2. Se para todo $x \in U$ e $t \in \mathbb{R}$, a derivada $F'_t(x)$ é ortogonal e $F_x(t)$ tem segunda derivada, então $\{F_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ exprime um movimento rígido do corpo U.

Prova:

Segue imediatamente da hipótese que as condições MRE_1—MRE_3 são satisfeitas.

∎

§ 5 - o movimento relativo

Consideremos $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$. O movimento χ de $\mathcal{B}$ induz no espaço pontual E uma classe de transformações $T_{p,t}: E \to E$ definida por

$$T_{p,t}(x) = \chi(p,t) + Q_t\left(x - \chi(p,\tau)\right)$$

Definição 7

Sejam $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$, $p \in \mathcal{B}$ e $\tau \in I$. Entende-se por mudança de referencial em E, relativa a p, τ e χ, a classe de transformações $T_{p,t}$: $E \to E$, definida por

$$T_{p,t}(x) = \chi(p,t) + Q_t\left(x - \chi(p,\tau)\right)$$

A partícula p será chamada origem da mudança de referencial.

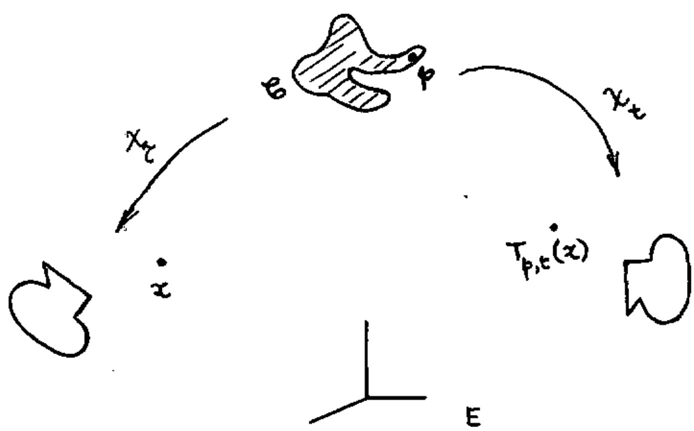


fig.3

Teorema 13

A transformação $T_{p,t}$ é inversível

Prova:

A transformação $T_{p,t}$ é afim e a parte linear é ortogonal. Então existe a inversa. Como $T_{p,t}(x) = \chi(p,t) + Q_t\left(x - \chi(p,\tau)\right)$, temos

$$T_{p,t}(x) - \chi(p,t) = Q_t\left(x - \chi(p,\tau)\right)$$

Aplicando Q_t^T, vem:

$$Q_t^T\left(T_{p,t}(x) - \chi(p,t)\right) = Q_t^T Q_t\left(x - \chi(p,\tau)\right)$$

Então:

$$x = \chi(p,\tau) + Q_t^T\left(T_{p,t}(x) - \chi(p,t)\right)$$

Desta forma, tem-se

$$T_{p,t}^{-1}(y) = \chi(p,\tau) + Q_t^T\left(y - \chi(p,t)\right)$$, onde $T_{p,t}^{-1}$ denota a inversa de $T_{p,t}$ ∎

Definição 8

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ dois corpos, $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{C}, I)$ e $\varphi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$. Chamaremos a aplicação $\mathcal{R} : \mathcal{B} \times I \rightarrow E$, definida por

$$\mathcal{R}(q,t) = T_{p,t}^{-1}\left[\varphi(q,t)\right]$$

de <u>movimento de $\mathcal{B}$ relativo à mudança de referencial</u> $T_{p,t}$, ou simplesmente, <u>movimento de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{C}$</u> :

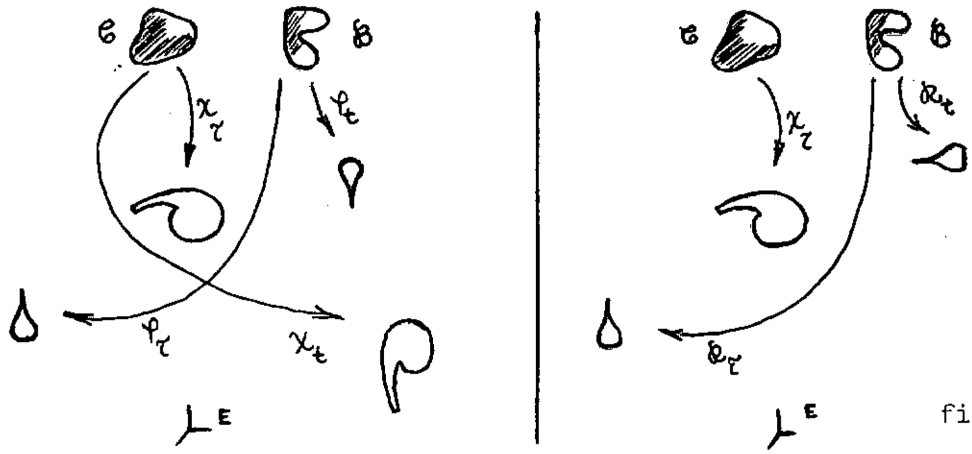


fig. 4

Definição 9

Seja $\mathcal{R} : \mathcal{B} \times I \rightarrow E$ um movimento de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{C}$. Chamaremos de <u>vetor posição de $q \in \mathcal{B}$ em relação à origem da mudança de referencial</u> ao vetor

$$\mathcal{P}_q(t) = \mathcal{R}(q,t) - \chi(p,\tau)$$

É evidente que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_q(t) &= \mathcal{R}(q,t) - \chi(p,\tau) = T_{p,t}^{-1}\left(\varphi(q,t)\right) - \chi(p,\tau) = \\ &= \chi(p,\tau) + Q_t^T\left(\varphi(q,t) - \chi(p,t)\right) - \chi(p,\tau) = \\ &= Q_t^T\left(\varphi(q,t) - \chi(p,t)\right).\end{aligned}$$

Então como

$$\wp_q(t) = Q_t^T \left(\varphi(q,t) - \chi(p,t)\right) ,$$

tomando-se as derivadas em relação a t , definimos

velocidade de q relativamente à mudança de referencial:

$$\dot{\wp}_q(t) \equiv \dot{\mathcal{R}}(q,t)$$

aceleração de q relativamente à mudança de referencial:

$$\ddot{\wp}_q(t) \equiv \ddot{\mathcal{R}}(q,t)$$

Devemos observar, tendo em vista os resultados anteriores, que $\mathcal{R} \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$. Os resultados seguintes, embora triviais, merecem a denominação de teorema.

Teorema 14 Galileu

- da composição de velocidades

$$\dot{\varphi}_q(t) = \dot{\chi}_p(t) + \dot{Q}_t Q_t^T \left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right) + Q_t \dot{\wp}_q(t)$$

- da composição de acelerações

$$\ddot{\varphi}_q(t) = \ddot{\chi}_p(t) + \overline{\dot{Q}_t Q_t^T}^{\bullet}\left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right) + \dot{Q}_t Q_t^T\left[\dot{Q}_t Q_t^T\left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right)\right] + Q_t \ddot{\wp}_q(t) + 2\dot{Q}_t \dot{\wp}_q(t)$$

Prova:

Como $\mathcal{R}(q,t) = T^{-1}_{p,t}\left(\varphi(q,t)\right)$, aplicando $T_{p,t}$ a ambos os membros, teremos:

$$\varphi(q, t) = T_{p,t}\left(\mathcal{R}(q,t)\right) = \chi(p,t) + Q_t\left(\mathcal{R}(q,t) - \chi(p,\tau)\right)$$

Derivando em relação a t, vem:

$$\dot{\varphi}_q(t) = \dot{\chi}_p(t) + \dot{Q}_t\left(\mathcal{R}(q,t) - \chi(p,\tau)\right) + Q_t\left[\overline{\mathcal{R}(q,t) - \chi(p,\tau)}^{\bullet}\right]$$

ou,

$$\dot{\varphi}_q(t) = \dot{\chi}_p(t) + \dot{Q}_t\left[Q_t^T \varphi_q(t) - \chi_p(t)\right] + Q_t \dot{\wp}_q(t)$$

E assim,

$$\dot{\varphi}_q(t) = \dot{\chi}_p(t) + \dot{Q}_t Q_t^T\left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right) + Q_t \dot{\wp}_q(t)$$

Desta última expressão, decorre:

$$\ddot{\varphi}_q(t) = \ddot{\chi}_p(t) + \left[\overline{\dot{Q}_t Q_t^T \left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right)}^{\bullet}\right] + Q_t \ddot{\wp}_q(t) + \dot{Q}_t \dot{\wp}_q(t)$$

Observemos ainda que

$$\varphi_q(t) - \chi_p(t) = Q_t\left(\mathcal{R}(q,t) - \chi(p,\tau)\right) = Q_t\, Q_t^T\left(\varphi(q,t) - \chi(p,t)\right)$$

De modo que

$$\left[\overline{\varphi_q(t) - \chi_p(t)}^{\,\bullet}\right] = \dot{Q}_t Q_t^T\left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right) + Q_t\, \dot{\mathcal{P}}_q(t)$$

Retomando a expressão obtida para a composição de acelerações, temos.

$$\ddot{\varphi}_q(t) = \ddot{\chi}_p(t) + \overline{\dot{Q}_t Q_t^T}^{\,\bullet}\left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right) + \dot{Q}_t Q_t^T\left[\dot{Q}_t Q_t^T\left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right) + Q_t\, \dot{\mathcal{P}}_q(t)\right] + Q_t\, \ddot{\mathcal{P}}_q(t) + \dot{Q}_t\, \dot{\mathcal{P}}_q(t)$$

E assim segue a expressão da aceleração.

$\blacksquare$

Notemos que $\dot{Q}_t\, \dot{\mathcal{P}}_q(t) = \dot{Q}_t Q_t^T Q_t \dot{\mathcal{P}}_q(t)$, e que $\dot{Q}_t Q_t^T(u) = w_t \times u$. Assim,

$$\ddot{\varphi}_q(t) = \ddot{\chi}_q(t) + \dot{w}_t \times\left[\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right] + w_t \times\left[w_t \times\left(\varphi_q(t) - \chi_p(t)\right)\right] + Q_t \ddot{\mathcal{P}}_q(t) + 2w_t \times\left(Q_t \dot{\mathcal{P}}_q(t)\right),$$

válida quando V é orientado por Δ.

Sejam $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$ e $\varphi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$ e $\mathcal{R} : \mathcal{B} \times I \to E$ o movimento de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{B}$. A aplicação $\mathcal{R}$ é definida por

$$\mathcal{R}(q,t) = T_{p,t}^{-1}\left(\varphi(q,t)\right)$$

Porém já constatamos que $\mathcal{R} \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$; de modo que se s, $q \in \mathcal{B}$

$$\mathcal{R}_s(t) = \mathcal{R}_q(t) + Q_t^{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}_s(\tau) - \mathcal{R}_q(\tau)\right)$$

pela aplicação do teorema de Euler. Também, como $\varphi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$,

$$\varphi_s(t) = \varphi_q(t) + Q_t^{\mathcal{B}}\left(\varphi_s(\tau) - \varphi_q(\tau)\right)$$

Como

$$\mathcal{R}_s(t) = T_{p,t}^{-1}\left(\varphi(s,t)\right) \text{ e } \mathcal{R}_s(\tau) = T_{p,\tau}^{-1}\left(\varphi(s,\tau)\right) = \mathrm{id}\ \varphi(s,\tau) = \varphi(s,\tau) \quad \text{e}$$

$$\mathcal{R}_q(t) = T_{p,t}^{-1}\left(\varphi(q,t)\right) \text{ e } \mathcal{R}_q(\tau) = \varphi(q,\tau)$$

procuremos relacionar Q_t, $Q_t^{\mathcal{B}}$ e $Q_t^{\mathcal{R}}$.

Substituindo na expressão do teorema de Euler para o movimento aquelas últimas expressões, vem:

$$T_{p,t}^{-1}\left(\varphi(s,t)\right) = T_{p,t}^{-1}\left(\varphi(q,t)\right) + Q_t^{\mathcal{R}}\left(\varphi(s,\tau) - \varphi(q,\tau)\right)$$

Desenvolvendo esta última expressão vem:

$$\chi(p,\tau) + Q_t^T\left(\varphi(s,t) - \chi(p,t)\right) = \chi(p,\tau) + Q_t^T\left(\varphi(q,t) - \chi(p,t)\right) + Q_t^{\mathcal{R}}\left(\varphi(s,\tau) - \varphi(q,\tau)\right)$$

ou,

$$Q_t^T\left(\varphi(s,t) - \varphi(q,t)\right) = Q_t^{\mathcal{R}}\left(\varphi(s,\tau) - \varphi(q,\tau)\right)$$

ou ainda:

$$\varphi(s,t) - \varphi(q,t) = Q_t Q_t^{\mathcal{R}}\left(\varphi(s,\tau) - \varphi(q,\tau)\right)$$

Dado que,

$$\varphi(s,t) = \varphi(q,t) + Q_t^{\mathcal{B}}\left(\varphi(s,\tau) - \varphi(q,\tau)\right)$$, concluímos

$$Q_t^{\mathcal{B}} = Q_t \cdot Q_t^{\mathcal{R}}$$ e enunciamos

Teorema 15

Sejam $\chi \in \Theta(\mathcal{E}, I)$, $\varphi \in \Theta(\mathcal{B}, I)$ e $\mathcal{R} = T_{p,t}^{-1} \circ \varphi$. Então se, Q_t, $Q_t^{\mathcal{B}}$ e $Q_t^{\mathcal{R}}$ são as transformações associadas, respectivamente, a χ, φ e $\mathcal{R}$, verifica-se a relação

$$Q_t^{\mathcal{B}} = Q_t \cdot Q_t^{\mathcal{R}}$$

Prova: Feita acima

∎

Definição 10

Chamaremos de vetor velocidade angular de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{E}$ ao vetor $w_t^{\mathcal{R}}$ tal que $w_t^{\mathcal{R}} \times u = \dot{Q}_t^{\mathcal{R}}\left(Q_t^{\mathcal{R}}\right)^T (u)$

Teorema 16 da composição de velocidades angulares

Sejam $\chi \in \Theta(\mathcal{E}, I)$, $\varphi, \mathcal{R} \in \Theta(\mathcal{B}, I)$, tal que $\mathcal{R} = T_{p,t}^{-1} \circ \varphi$. Se w_t, $w_t^{\mathcal{B}}$ e $w_t^{\mathcal{R}}$ são os vetores velocidade angular associados a χ, φ e $\mathcal{R}$, respectivamente, então

$$w_t^{\mathcal{B}} \times u = w_t \times u + Q_t\left[w_t^{\mathcal{R}} \times \left(Q_t^T(u)\right)\right]$$

Prova:

Temos que $Q_t^{\mathcal{B}} = Q_t \cdot Q_t^{\mathcal{R}}$ e $\left(Q_t^{\mathcal{B}}\right)^T = \left(Q_t^{\mathcal{R}}\right)^T \cdot Q_t^T$

Assim, derivando em relação a $\underline{t}$.

$$\dot{Q}_t^{\mathcal{B}} = \dot{Q}_t\, Q_t^{\mathcal{R}} + Q_t\, \dot{Q}_t^{\mathcal{R}}$$

Desta forma

$$\dot{Q}^{\mathcal{B}}_t \left(Q^{\mathcal{B}}_t\right)^T = \dot{Q}_t\, Q^{\mathcal{R}}_t \left(Q^{\mathcal{R}}_t\right)^T Q^T_t + Q_t\, \dot{Q}^{\mathcal{R}}_t \left(Q^{\mathcal{R}}_t\right)^T Q^T_t$$

ou

$$\dot{Q}^{\mathcal{B}}_t \left(Q^{\mathcal{B}}_t\right)^T = \dot{Q}_t\, Q^T_t + Q_t\, \dot{Q}^{\mathcal{R}}_t \left(Q^{\mathcal{R}}_t\right)^T Q^T_t$$

Resulta assim que

$$\dot{Q}^{\mathcal{B}}_t \left(Q^{\mathcal{B}}_t\right)^T (u) = \dot{Q}_t\, Q^T_t (u) + Q_t\left[\dot{Q}^{\mathcal{R}}_t \left(Q^{\mathcal{R}}_t\right)^T\right] Q^T_t (u) \text{ , e}$$

$$w^{\mathcal{B}}_t \times u = w_t \times u + Q_t\left[w^{\mathcal{R}}_t \times \left(Q^T_t (u)\right)\right] ,$$

ou simbòlicamente:

$$w^{\mathcal{B}}_t = w_t + Q_t\, w^{\mathcal{R}}_t \times Q^T_t$$

■

Seja $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$. Vimos que associados a χ estão a transformação Q_t e o vetor velocidade angular w_t, se V é orientado. À luz da mudança de referencial avaliemos w_t.

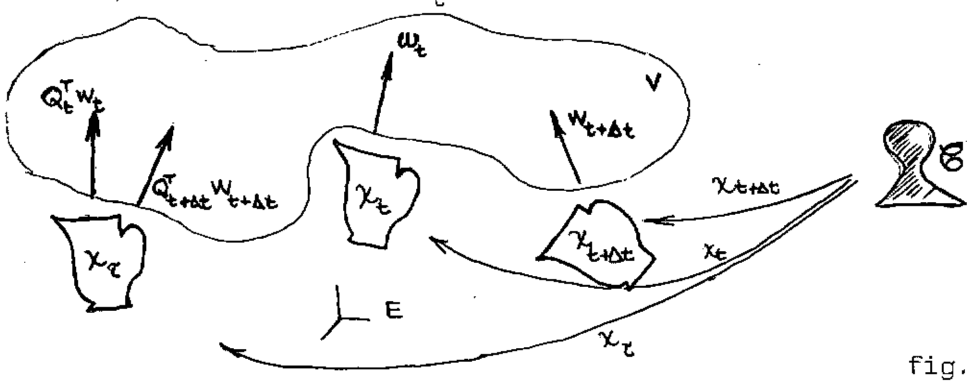


fig. 5

Teorema 17

Se $\chi \in \mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$, então $\dot{w}_t = Q_t\left[\dot{\overline{Q^T_t\, w_t}}\right]$

Prova:

Avaliemos $\dot{w}_t$

$$w_t = \mathrm{id}\; w_t = Q_t\, Q^T_t\, w_t$$

Derivando em relação a t, vem:

$$\dot{w}_t = \dot{\overline{Q_t Q^T_t w_t}} = \dot{Q}_t\left[Q^T_t w_t\right] + Q_t\left[\dot{\overline{Q^T_t\, w_t}}\right] =$$

$$= w_t \times w_t + Q_t\left[\dot{\overline{Q_t^T \, w_t}}\right] = Q_t\left[\dot{\overline{Q_t^T \, w_t}}\right] \quad ,$$

dado que, $\langle u \times u, w \rangle = \Delta(u,u,w) = 0$, para todo $w \in V$.

$\blacksquare$

CAPÍTULO IV

DINÂMICA

§ 1 - geometria das massas

Definição 11

Sejam $\mathcal{B}$ um conjunto não vazio e $\mathcal{B}_\sigma$ uma σ - álgebra de subconjuntos de $\mathcal{B}$. Seja μ uma medida finita em $\mathcal{B}_\sigma$, isto é, $\mu(\mathcal{B}) < \infty$. Chamamos de corpo à tripla $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\sigma, \mu)$

É trivial a verificação da existência de pelo menos um corpo. Basta considerar $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $\mathcal{B}_\sigma = \mathcal{P}(\mathcal{B})$, o conjunto das partes de $\mathcal{B}$, e μ a medida induzida por $\mu(p_i) = 1$. Também é claro que $\Theta(\mathcal{B}, I)$ é não vazio, de modo que a teoria exposta não perde sentido por vacuidade.

Definição 12

Se $\mathcal{B}$ é um corpo, então definimos a classe $\mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$ como sendo

$$\mathfrak{M}(\mathcal{B}, I) = \{ \chi \in \Theta(\mathcal{B}, I) \mid \chi_\tau(p) - y_0 \text{ é somável e } \| \chi_\tau(p) - y_0 \| < \lambda \}$$

onde $p \in \mathcal{B}$, $\tau \in I$ e $\lambda \in \mathbb{R}^+$ isto é, $\lambda \geqslant 0$.

Novamente é evidente que existe pelo menos um corpo tal que $\mathfrak{M}(\mathcal{B}, I) \neq \phi$. Implìcitamente, sempre consideraremos corpos tais que $\mathfrak{M}(\mathcal{B}, I) \neq \emptyset$.

Devemos observar que se $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$, então

$$\chi_t(p) - y_0 = \chi_t \circ \chi_\tau^{-1} \circ \chi_\tau(p) - y_0 = (\chi_t \circ \chi_\tau^{-1}) \circ \chi_\tau(p) - y_0$$

Como $\chi_t \circ \chi_\tau^{-1}$ gera em E o homeomorfismo T, definido por

$$T(x) = \chi(q, t) + Q_t\,(x - \chi(q, \tau)) \qquad \text{e}$$

como $(\chi_t \circ \chi_\tau^{-1}) \circ \chi_\tau(p) = T\,(\chi_\tau(p))$, concluímos que $\chi_t(p) - y_0$ é somável e limitada.

Definição 13

Se $\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}, I)$ chama-se <u>momento linear</u> de $\mathcal{B}$, no instante t, em relação ao ponto y_o, ao vetor

$$_{y_o}\mathcal{L}_t = \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_o)\, d\mu$$

Definição 14

Se $\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}, I)$, chama-se <u>centro de massa</u> do corpo $\mathcal{B}$, no instante t, ao ponto

$$\bar{y}_t = \frac{\int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - y_o\, d\mu}{m} + y_o \equiv \frac{_{y_o}\mathcal{L}_t}{m} + y_o$$

onde $m = \mu(\mathcal{B})$

Mostraremos que o ponto $\bar{y}_t$ independe de y_o

Teorema 18

Se $\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}, I)$, então existe para cada $t \in I$ um único ponto $\bar{y}'_t$ tal que o momento linear de $\mathcal{B}$ em relação a $\bar{y}'_t$ é nulo.

Êste único ponto $\bar{y}'_t$ é o centro de massa do corpo $\mathcal{B}$ no instante t.

Prova:

Temos que:

$$_{\bar{y}_t}\mathcal{L}_t = \int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - \bar{y}_t\, d\mu = \int_{\mathcal{B}} \left[\chi(p,t) - \left(\frac{\int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_o)\, d\mu}{m} + y_o\right)\right] d\mu =$$

$$= \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_o)\, d\mu - \int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - y_o\, d\mu = 0$$

o que demonstra que o momento linear em relação ao centro de massa é nulo.

Por outro lado, se $\bar{x}$ é um ponto tal que $\int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - \bar{x}\, d\mu = 0$, então.

$$0 = \int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - \bar{x}\, d\mu = \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - \bar{y}_t + \bar{y}_t - \bar{x})\, d\mu = \int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - \bar{y}_t\, d\mu + \int_{\mathcal{B}} \bar{y}_t - \bar{x}\, d\mu =$$

$$= 0 + (\bar{y}_t - \bar{x})\, m$$

Logo, $\bar{y}_t = \bar{x}$, o que demonstra a unicidade do centro de massa.

∎

Sejam u, v vetores de V. Notaremos por $u \otimes v$ o operador linear de V em V definido por

$$u \otimes v : V \to V : w \mapsto u \langle v, w \rangle$$

Notemos que se $\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}, I)$, então por hipótese $\| \chi(p,t) - y_0 \| < \lambda$, de modo que tem sentido a

Definição 15

Se $\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}, I)$, chama-se tensor de inércia em relação a $y_0 \in E$, no instante t, ao operador

$$I_{y_0,t} = \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_0) \otimes (\chi(p,t) - y_0)\, d\mu \quad \text{, definido por}$$

$$I_{y_0,t}(w) = \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_0) \langle \chi(p,t) - y_0, w \rangle\, d\mu$$

Evidentemente o tensor de inércia é simétrico.

Teorema 19 do transporte do tensor de inércia

Temos que

$$I_{y_0,t} = I_{\bar{y},t} + m(\bar{y}_t - y_0) \otimes (\bar{y}_t - y_0)$$

Prova:

$$I_{y_0,t} = \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_0) \otimes (\chi(p,t) - y_0)\, d\mu \quad \text{e como}$$

$$\bar{y}_t = \int_{\mathcal{B}} \frac{(\chi(p,t) - y_0)\, d\mu}{m} + y_0 \quad \text{, vem}$$

$$I_{y_0,t} = \int_{\mathcal{B}} \left(\chi(p,t) - (\bar{y}_t - \frac{\mathcal{L}_{y_0} t}{m})\right) \otimes \left(\chi(p,t) - (\bar{y}_t - \frac{\mathcal{L}_{y_0} t}{m})\right) d\mu$$

Desenvolvendo esta última expressão:

$$I_{y_0,t} = I_{\bar{y},t} + \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - \bar{y}_t) \otimes \frac{\mathcal{L}_{y_0} t}{m}\, d\mu + \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathcal{L}_{y_0} t}{m} \otimes (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\, d\mu + \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathcal{L}_{y_0} t}{m} \otimes \frac{\mathcal{L}_{y_0} t}{m}\, d\mu =$$

$$= I_{\bar{y},t} + 0 + 0 + \frac{1}{m} \mathcal{L}_{y_0} t \otimes \mathcal{L}_{y_0} t = I_{\bar{y},t} + m(\bar{y}_t - y_0) \otimes (\bar{y}_t - y_0) \quad \blacksquare$$

§ 2 - a dinâmica

Seja $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$. Por hipótese, a aplicação $\psi_p : I \to V$: $t \mapsto \chi(p,t) - y_0$ é derivável. Por outro lado, temos também por hipótese que $\|\chi(p,\tau) - y_0\| < \lambda$, para todo $p \in \mathcal{B}$. E assim, se considerarmos $[a,b] \subset I$, teremos

$$\|\chi(p,t) - y_0\| < \Lambda \quad , \text{ para } (p,t) \in \mathcal{B} \times [a,b]$$

Nestas condições, a aplicação $F : [a,b] \to V$: $t \mapsto \int_{\mathcal{B}} (\chi_p(t) - y_0) d\mu$ é contínua e como $\dot{\chi}_p(t) = \dot{\chi}_q(t) + \dot{Q}_t \left(\chi_t(p) - \chi_t(q)\right)$, decorre das hipóteses que

$$\|\dot{\chi}_p(t)\| < \alpha \quad , \text{ para todo } (p,t) \in \mathcal{B} \times [a,b]$$

Logo, podemos definir

Definição 16

Se $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$, entendemos por quantidade de movimento do corpo $\mathcal{B}$ no instante t, o vetor

$$M_t \equiv \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \, d\mu = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - y_0 \;\; d\mu$$

De maneira análoga, vem:

Definição 17

Se $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$, entendemos por momento cinético do corpo $\mathcal{B}$ em relação ao ponto y_0, no instante t, como sendo o operador

$$H_{y_0,t} = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \otimes (\chi(p,t) - y_0) - (\chi(p,t) - y_0) \otimes \dot{\chi}(p,t) \;\; d\mu$$

Por comodidade, notaremos êste último operador por

$$H_{y_0,t} = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - y_0) \;\; d\mu$$

Notemos que o operador $H_{y_0,t}$ é antissimétrico.

Estas definições nos conduzem aos seguintes teoremas

Teorema 20

$$M_t = m\,\dot{\bar{y}}_t$$

Prova:

$$M_t = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t)\,d\mu \equiv \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_o)\,d\mu = \frac{d}{dt}\left[m(\bar{y}_t - y_o)\right] = m\,\dot{\bar{y}}_t \qquad \blacksquare$$

Teorema 21 do transporte do momento cinético

Temos que

$$H_{y_o,t} = H_{\bar{y},t} + m\,\dot{\bar{y}}_t \wedge (\bar{y}_t - y_o)$$

Prova:

Aplicando a definição vem

$$H_{y_o,t} = \int_{\mathcal{B}} (\dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - y_o))\,d\mu = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\,d\mu +$$

$$+ \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\bar{y}_t - y_o)\,d\mu = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\,d\mu + m\,\dot{\bar{y}}_t \wedge (\bar{y}_t - y_o) \qquad \blacksquare$$

Note-se que ,

$$\int_{\mathcal{B}} (\dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\,d\mu = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\,d\mu -$$

$$- \int_{\mathcal{B}} \dot{\bar{y}}_t \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\,d\mu = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\,d\mu - 0 \quad ,$$

pois $\int_{\mathcal{B}} \chi(p,t) - \bar{y}_t \; d\mu = 0$

Teorema 22 da representação do momento cinético

Se $\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{B}, I)$ e se $\dot{\chi}_q(t) = 0$ para uma partícula $q \in \mathcal{B}$, num dado instante $\underline{t}$, então:

$$H_{y_o,t} = \dot{Q}_t Q_t^T I_{y_o,t} + I_{y_o,t} \dot{Q}_t Q_t^T = \dot{Q}_t Q_t^T I_{y_o,t} - \left[\dot{Q}_t Q_t^T I_{y_o,t}\right]^*$$

onde $y_o = \chi_q(t)$

Prova:

Lembrando que $\dot{\chi}_p(t) = \dot{\chi}_q(t) + \dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - \chi(q,t))$, vem

$$H_{y_o,t} = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t)-y_o)\, d\mu = \int_{\mathcal{B}} \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t)-y_o)\right] \wedge (\chi(p,t)-y_o)\, d\mu =$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t)-y_o)\right] \otimes (\chi(p,t)-y_o)\, d\mu - \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t)-y_o) \otimes \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t)-y_o)\right] d\mu$$

Porém, $\int_{\mathcal{B}} \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t)-y_o)\right] \otimes (\chi(p,t)-y_o)\, d\mu$ é o operador definido por

$$w \longmapsto \int_{\mathcal{B}} \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t)-y_o)\right] \langle \chi(p,t)-y_o, w\rangle\, d\mu = \dot{Q}_t Q_t^T \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t)-y_o)\langle \chi(p,t)-y_o, w\rangle d\mu$$

que é exatamente a composição $\dot{Q}_t Q_t^T \circ I_{y_o,t}$

Além disso, se Ω é um operador antissimétrico em V, tem-se, qualquer que seja $v \in V$.

$$\left[\int_{\mathcal{B}} v \otimes \Omega v\, d\mu\right](w) = \int_{\mathcal{B}} v \langle \Omega v, w\rangle\, d\mu =$$
$$= -\int_{\mathcal{B}} v \langle v, \Omega w\rangle\, d\mu = -\left[\int_{\mathcal{B}} v \otimes v\, d\mu\right](\Omega w)$$

de modo que

$$\int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t)-y_o) \otimes \dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t)-y_o)\, d\mu = -\left[\int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t)-y_o) \otimes (\chi(p,t)-y_o)\, d\mu\right] \cdot \dot{Q}_t Q_t^T$$

Assim decorre o resultado

$$H_{y_o,t} = \dot{Q}_t Q_t^T\, I_{y_o,t} + I_{y_o,t}\, \dot{Q}_t Q_t^T$$

Como $I_{y_o t}$ é simétrico e $\dot{Q}_t Q_t^T$ é antissimétrico, temos que

$$\left(\dot{Q}_t Q_t^T\, I_{y_o,t}\right)^* = \left(I_{y_o,t}\right)^* \left(\dot{Q}_t Q_t^T\right)^* = -I_{y_o,t}\, \dot{Q}_t Q_t^T$$

o que demonstra o teorema. ∎

Definição 18

Se $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$, chamamos de <u>energia cinética</u> do corpo $\mathcal{B}$ no instante <u>t</u> ao escalar

$$V_t = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\chi}(p,t), \dot{\chi}(p,t)\rangle\, d\mu$$

Teorema 23 Koenig

Se $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$, então,

$$V_t = \frac{1}{2} m \langle \dot{\bar{y}}_t, \dot{\bar{y}}_t \rangle + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t, \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t \rangle \, d\mu$$

Prova:

De fato,

$$V_t = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\chi}(p,t), \dot{\chi}(p,t) \rangle \, d\mu = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \langle \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t + \dot{\bar{y}}_t, \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t + \dot{\bar{y}}_t \rangle \, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t, \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t \rangle \, d\mu + \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\bar{y}}_t, \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t \rangle \, d\mu + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\bar{y}}_t, \dot{\bar{y}}_t \rangle \, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t, \dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t \rangle \, d\mu + 0 + \frac{1}{2} m \langle \dot{\bar{y}}_t, \dot{\bar{y}}_t \rangle ,$$

dado que $\int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - \bar{y}_t) \, d\mu = 0$ para todo $t \in I$ ∎

Teorema 24 da representação da energia cinética

Se $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B}, I)$ e se $\dot{\chi}_q(t) = 0$ para uma partícula $q \in \mathcal{B}$, então

$$V_t = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\dot{Q}_t Q_t^T \circ I_{y_0, t} \circ (\dot{Q}_t Q_t^T)^* \right]$$

onde $y_0 = \chi_q(t)$.

Prova:

Lembrandp que $\dot{\chi}_p(t) = \dot{\chi}_q(t) + \dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - \chi(q,t))$ e observando que

$$\int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\chi}(p,t), \dot{\chi}(p,t) \rangle \, d\mu = \operatorname{tr} \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \otimes \dot{\chi}(p,t) \, d\mu \quad , \text{ temos:}$$

$$V_t = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \langle \dot{\chi}(p,t), \dot{\chi}(p,t) \rangle \, d\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \otimes \dot{\chi}(p,t) \, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \int_{\mathcal{B}} \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - \chi(q,t)) \right] \otimes \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - \chi(q,t)) \right] d\mu =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \int_{\mathcal{B}} \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - y_0) \right] \otimes \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - y_0) \right] d\mu =$$

Por outro lado,

$$\left\{ \int_{\mathcal{B}} \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - y_0) \right] \otimes \left[\dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - y_0) \right] d\mu \right\} (w) =$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - y_0) \langle \dot{Q}_t Q_t^T (\chi(p,t) - y_0) , w \rangle \, d\mu =$$

$$= \dot{Q}_t Q_t^T \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t)-y_0)\langle \dot{Q}_t Q_t^T(\chi(p,t)-y_0),\ w\rangle \, d\mu =$$

$$= \dot{Q}_t Q_t^T \int_{\mathcal{B}} \chi(p,t)-y_0 \, \langle \chi(p,t)-y_0,\ -\dot{Q}_t Q_t^T w\rangle \, d\mu =$$

$$= \dot{Q}_t Q_t^T \cdot \left[\int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t)-y_0) \otimes (\chi(p,t)-y_0)\, d\mu\right] (-\dot{Q}_t Q_t^T w)$$

$$= \left\{\dot{Q}_t Q_t^T \cdot I_{y_0,t} \cdot \left(\dot{Q}_t Q_t^T\right)^*\right\}(w)$$

Desta forma, temos

$$V_t = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\dot{Q}_t Q_t^T \cdot I_{y_0,t} \cdot \left(\dot{Q}_t Q_t^T\right)^*\right] \qquad \blacksquare$$

Vimos que $M_t = m\dot{\bar{y}}_t = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t)\, d\mu$. Pelas hipóteses feitas, M_t é contínua em $[a,b] \subset I$. Queremos derivar outra vez em relação a $\underline{t}$. Definimos então:

Definição 19

Se $\chi \in \mathfrak{M}(\mathcal{B},I)$, então a classe $\mathfrak{F}(\mathcal{B},I) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{B},I)$ é definida por: $\chi \in \mathfrak{F}(\mathcal{B},I)$ se para todo $[a,b] \subset I$ existe $\alpha_{ab} \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\ddot{\chi}p,t\| < \alpha_{ab}$, para todo $(p,t) \in \mathcal{B} \times [a,b]$

Assim temos:

Definição 20

Se $\chi \in \mathfrak{F}(\mathcal{B},I)$, entendemos por <u>resultante das fôrças</u> que atuam sôbre $\mathcal{B}$, no instante $\underline{t}$, o vetor

$$F_t = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t)\, d\mu = \int_{\mathcal{B}} \ddot{\chi}(p,t)\, d\mu = \frac{d}{dt}(m\dot{\bar{y}}_t) = m\ddot{\bar{y}}_t$$

Se $\chi \in \mathfrak{F}(\mathcal{B},I)$, entendemos por <u>momento das fôrças</u> que atuam sôbre $\mathcal{B}$ no instante $\underline{t}$, em relação a $y_0 \in E$, o operador

$$G_{y\,t} = \int_{\mathcal{B}} \ddot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t)-y_0)\, d\mu$$

Teorema 25

O operador momento das fôrças em relação a y_o no instante $\underline{t}$ é a derivada do operador $H_{y_o,t}$ e o operador momento das fôrças em relação a $\bar{y}_t$, no instante $\underline{t}$, é a derivada do operador $H_{\bar{y},t}$.

Prova:

a primeira parte é imediata, pois

$$H_{y_o,t} = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - y_o)\, d\mu ,$$

de modo que

$$\frac{d}{dt} H_{y_o,t} = \dot{H}_{y_o,t} = \int_{\mathcal{B}} \ddot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - y_o)\, d\mu = G_{y_o,t}$$

Por outro lado

$$H_{\bar{y},t} = \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\, d\mu \quad \text{, e assim}$$

$$\dot{H}_{\bar{y},t} = \int_{\mathcal{B}} \ddot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\, d\mu + \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (\dot{\chi}(p,t) - \dot{\bar{y}}_t)\, d\mu =$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \ddot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\, d\mu + \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge (-\dot{\bar{y}}_t)\, d\mu$$

porém, como

$$\left[\int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \wedge \dot{\bar{y}}_t\, d\mu\right](w) =$$

$$= \left[\int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \otimes \dot{\bar{y}}_t\, d\mu - \int_{\mathcal{B}} \dot{\bar{y}}_t \otimes \dot{\chi}(p,t)\, d\mu\right] w =$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \dot{\chi}(p,t) \langle \dot{\bar{y}}_t, w\rangle\, d\mu - \int_{\mathcal{B}} \dot{\bar{y}}_t \langle \dot{\chi}(p,t), w\rangle\, d\mu =$$

$$= m\, \dot{\bar{y}}_t \langle \dot{\bar{y}}_t, w\rangle - \dot{\bar{y}}_t \langle m\dot{\bar{y}}_t, w\rangle = 0$$

Desta forma,

$$\dot{H}_{\bar{y},t} = \int_{\mathcal{B}} \ddot{\chi}(p,t) \wedge (\chi(p,t) - \bar{y}_t)\, d\mu = G_{\bar{y},t} \qquad \blacksquare$$

Teorema 26 do transporte do momento das fôrças

Se $\chi \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, I)$, então

$$G_{y_o,t} = G_{\bar{y},t} + F_t \wedge (\bar{y}_t - y_o)$$

Prova:

Pelo teorema 21, temos

$$H_{y_o,t} = H_{\bar{y},t} + m\dot{\bar{y}}_t \wedge (\bar{y}_t - y_o)$$

Derivando em relação a t, vem

$$\dot{H}_{y_o,t} = \dot{H}_{\bar{y},t} + m\ddot{\bar{y}}_t \wedge (\bar{y}_t - y_o)$$

Então,

$$G_{y_o,t} = G_{\bar{y},t} + F_t \wedge (\bar{y}_t - y_o)$$

∎

<u>Teorema 27</u> da representação do momento das fôrças

Se $\chi \in \mathfrak{F}(\mathcal{B}, I)$ e se $\dot{\chi}_q(t) \equiv 0$ para uma partícula $q \in \mathcal{B}$, então

$$\dot{H}_{y_o,t} = \overline{\dot{Q}_t Q_t^T}^{\bullet}\, I_{y_o,t} + \dot{Q}_t Q_t^T\ \dot{Q}_t Q_t^T I_{y_o,t} - \left[\overline{\dot{Q}_t Q_t^T}^{\bullet}\, I_{y_o,t} + \dot{Q}_t Q_t^T \dot{Q}_t Q_t^T\, I_{y_o,t}\right]^*$$

onde $y_o = \chi_q(t)$

Prova:

De acôrdo com o teorema 22, podemos escrever

$$H_{y_o,t} = \dot{Q}_t Q_t^T\, I_{y_o,t} - \left[\dot{Q}_t Q_t^T\, I_{y_o,t}\right]^*$$

Como

$I_{y_o,t} = \int_{\mathcal{B}} (\chi(p,t) - y_o) \otimes (\chi(p,t) - y_o)\, d\mu$ e, de acôrdo com a hipótese, pela aplicação do teorema de Euler,

$$\chi(p,t) - y_o = Q_t(\chi(p,\tau) - y_o) \quad , \text{ temos}$$

$$I_{y_o,t} = \int_{\mathcal{B}} [Q_t\ (\chi(p,\tau) - y_o)] \otimes [Q_t(\chi(p,\tau) - y_o)]\, d\mu$$

Desta forma $I_{y_o,t} = Q_t \cdot I_{y_o,\tau} \cdot Q_t^T$, utilizando o desenvolvimento da demonstração do teorema 24.

Então

$$H_{y_o,t} = \dot{Q}_t Q_t^T Q_t\, I_{y_o,\tau}\, Q_t^T - \left[\dot{Q}_t Q_t^T \dot{Q}_t I_{y_o,\tau}\, Q_t^T\right]^*$$

Calculemos a derivada de $\dot{Q}_t Q_t^T Q_t I_{y_0,\tau}\, Q_t^T$ em relação a $\underline{t}$. Temos

$$\left[\overset{\bullet}{\overline{\dot{Q}_t Q_t^T Q_t I_{y_0,\tau}\, Q_t^T}}\right] = \overset{\bullet}{\overline{\dot{Q}_t Q_t^T}}\, Q_t I_{y_0,\tau}\, Q_t^T + \dot{Q}_t Q_t^T \dot{Q}_t I_{y_0,\tau}\, Q_t^T + \dot{Q}_t Q_t^T Q_t I_{y_0,\tau}\, \dot{Q}_t^T =$$

$$= \overset{\bullet}{\overline{\dot{Q}_t Q_t^T}} I_{y_0,t} + \dot{Q}_t Q_t^T \dot{Q}_t Q_t^T Q_t I_{y_0,\tau}\, Q_t^T + \dot{Q}_t Q_t^T Q_t I_{y_0,\tau}\, Q_t^T Q_t \dot{Q}_t^T =$$

$$= \overset{\bullet}{\overline{\dot{Q}_t Q_t^T}} I_{y_0,t} + \dot{Q}_t Q_t^T \dot{Q}_t Q_t^T I_{y_0,t} + \dot{Q}_t Q_t^T I_{y_0,t} \left(\dot{Q}_t Q_t^T\right)^*$$

Observemos ainda que $\dot{Q}_t Q_t^T I_{y_0,t} \left(\dot{Q}_t Q_t^T\right)^*$ é simétrico. Desta forma

$$\dot{H}_{y_0,t} = \overset{\bullet}{\overline{\dot{Q}_t Q_t^T}} I_{y_0,t} + \dot{Q}_t Q_t^T \dot{Q}_t Q_t^T I_{y_0,t} - \left[\overset{\bullet}{\overline{\dot{Q}_t Q_t^T}} I_{y_0,t} + \dot{Q}_t Q_t^T \dot{Q}_t Q_t^T I_{y_0,t}\right]^*$$

$\blacksquare$

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Tratamos de uma formalização da mecânica dos corpos rígidos. Devemos observar, no entanto, que decorre naturalmente dêste trabalho uma axiomática da mecânica clássica dos corpos constituídos por um número finito de partículas . Construamo-la sumàriamente:

Seja $\mathcal{B}$ um conjunto não vazio com número finito de elementos. Sejam $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{P}(\mathcal{B})$, o conjunto das partes de $\mathcal{B}$, e μ a medida induzida pela regra: a cada partícula $p \in \mathcal{B}$ associa-se um número real positivo chamado sua "massa". Consideremos χ um movimento de $\mathcal{B}$ e definamos a classe $G_\gamma(\mathcal{B},I)$ como sendo a classe dos movimentos χ do corpo tais que $\|\ddot{\chi}(p,t)\| < \lambda < \infty$, para todo $(p,t) \in \mathcal{B} \times I$. É imediata a validade, para a classe $G_\gamma(\mathcal{B},I)$, de todos os teoremas do capítulo IV que não envolvam o tensor de inércia.

É importante notar que, dado $\chi \in \Theta(\mathcal{B},I)$, a transformação Q_t é obtida mais fàcilmente que o vetor w_t, mesmo sem observar que para a definição de w_t exige-se o enriquecimento de V com uma orientação. Além disso, se $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de aplicações de um aberto conexo $U \subset E$ em E e se são satisfeitas as hipóteses do teorema 12, então $Q_t = F_t'(x)$. E é comum a situação em que $\mathcal{B} \subset E$ e um movimento $\chi \in \Theta(\mathcal{B},I)$ é descrito por uma família $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de aplicações tal que cada F_t pode ser estendida a um mesmo aberto conexo contendo $\mathcal{B}$, satisfazendo esta extensão às hipóteses do teorema 12.

Uma observação sôbre o tensor de inércia por nós definido. Se tomarmos a representação dêste tensor segundo uma base ortonormal, sua diagonal será constituída pelos momentos de inércia em relação aos "planos" e não pelos momentos de inércia em relação aos "eixos", como habitualmente. Mas é exatamente a representação por nós proposta que simplifica as expressões dos teoremas 22, 24 e 27, e que, segundo o nosso ponto de vista, se impõe mais naturalmente, quando descrevemos os movimentos via a transformação Q_t.

A contribuição mais importante dêste trabalho reside no fato de não se ter suposto definida sôbre o corpo nenhuma estrutura, exceto a de um espaço de medida $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\sigma, \mu)$. A estrutura diferenciável requerida é apenas aquela existente em um intervalo da reta. Por outro lado, a descrição de movimentos é completamente reduzida à algebra linear, um fato que todos os textos usuais de mecânica parecem ignorar, embora não vacilem em usar a representação das grandezas cinemáticas como setas (ou vetores livres), esquecendo-se, entretanto, das aplicações e formas lineares definidas em um tal espaço.

A idéia preponderante e decisiva da utilização da álgebra linear em mecânica, foi motivada pelos trabalhos de W. Noll, enquanto que a idéia de espaço de medida, embora devida a Brelot* sob forma latente, também se impôs apenas após os esforços de Noll (vide, e.g., TRUESDELL & NOLL[12] e referências lá citadas).

*

BRELOT, M. – Sur les Principes Mathématiques de la Mécanique Classique, Ann. Univ. de Grenoble, 19, 24 pp: 1943

Ibid – Sur Quelques Points de la Mécanique Rationnelle, Ann. Univ. de Grenoble 20, 37 pp:1944

Ibid – Les Principles Mathématiques de la Mécanique Classique, Grenoble e Paris; Arthaud: 1945.

-LISTA DE SÍMBOLOS-

A) Alfabeto Latino Maiúsculo:

- E – espaço pontual euclidiano
- V – espaço vetorial real
- $\mathbb{R}$ – corpo dos reais
- $\mathbb{R}^+$ – reais não negativos
- I – intervalo aberto
- T, F – aplicação
- Q – transformação ortogonal
- $I_{y_o,t}$ – tensor de inércia
- M_t – quantidade de movimento
- F_t – resultante das fôrças
- $H_{y_o,t}$ – momento cinético
- V_t – energia cinética
- $G_{y_o,t}$ – momento das fôrças

B) Alfabeto Latino Minúsculo:

- p,q,r – partícula
- x,y,z – pontos de E
- t – instante
- u,v,w – vetores de V
- i,j,t – índices
- v_p – velocidade da partícula p
- a_p – aceleração da partícula p
- w_t – velocidade angular
- m – massa do corpo
- $\bar{y}$ – centro de massa

C) Alfabeto Latino Maíusculo Cursivo:

- $\mathcal{R}$ – movimento relativo
- $\mathcal{C},\mathcal{B}$ – corpo

$\mathcal{O}(\mathcal{B}, I)$ – classe dos movimentos rígidos de corpos que se configuram tridimensionalmente em I.

$\mathcal{M}_t$ – aplicação de E em E

$\mathcal{P}_q$ – vetor posição de q

$\mathcal{M}(\mathcal{B}, I)$ – classe específica de movimentos

$\mathcal{F}(\mathcal{B}, I)$ – classe específica de movimentos

D) Alfabeto Grego Maiúsculo:

χ – movimento do corpo

Ψ_p – vetor posição da partícula p

Δ – função determinante

φ, Ω – transformação de V em V.

E) Alfabeto Grego Minúsculo

τ – instante

$\xi, \varphi, \lambda, \alpha, \beta$ – nº real

σ – permutação

F) Símbolos específicos:

$\langle \, , \rangle$ produto interno

$\| \cdot \|$ norma

$\times$ produto vetorial

$\otimes$ produto tensorial

$\wedge$ produto externo

$\int$ integral

Im imagem de

Ker anulador de

* transposta de aplicação linear

^{T} inversa de transformação ortogonal

tr traço

$\dot{}$ derivada em relação a t

id aplicação identidade

-BIBLIOGRAFIA-

1 - GREUB, W.H - Linear Algebra, (3ª ed.) N.York: Springer, 1967

2 - SYNGE, J.L. & B.A. GRIFFITH - Principles of Mechanics, N.York: McGraw-Hill, 1959.

3 - GOLDSTEIN, H. - Classical Mechanics, Reading (Mass.): Addison - Wesley, 1950.

4.- LOOMIS, L.H. & S.STERNBERG - Advanced Calculus, Reading (Mass.): Adi - son-Wesley, 1968.

5 - BUNGE, M. - Foundations of Physics, Springer: 1967.

6 - NOLL, W. - The Foundations of Mechanics - Res. Rept. 66-2 Dept. of Mathematics Carnegie - Mellon U. (1965) Non-Linear Continuum Theories (1966) 159-200, Roma: Edizioni Cremonese.

7.- NOLL, W. - The foundations of Classical Mechanics in the light of recent advances in Continuum Mechanics - The Axiomatic Method (Henkin, L., P. Suppes & A. Tarski eds.), Amsterdam: North Holland, 1959.

8 - OLIVEIRA, L. de - Sôbre a Natureza Lógica da Mecânica Clássica, Tese M.Sc., COPPE-UFRJ., 1969.

9.- BARTLE, R.G. - The Elements of Integration, N. York: John Wiley, 1966.

10 - HALMOS, P.R. - Measure Theory, Princeton (N.J.): D.Van Nostrand, 1950.

11 - ROBERTS, A.W. - The Derivative as a Linear Transformation, Am. Math.Monthly 76 (1969), 632-638, 1969.

12 - TRUESDELL, C.A. & W. NOLL - The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Em Handbuch der Physik III/3, (S.Flügge, editor). Berlin, Heidelberg, N.York: Springer, 1965.